Durée : 5 heures

Speedrun Mode

Exercice 2 (Filtre RC)

On considère un filtre électrique RC constitué d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité $C = 0.47\mu F$. Lorsqu'on applique à l'entrée du filtre une tension sinusoïdale $u_E(t) = U_{Em}\sin(2\pi Nt)$ de fréquence N réglable, on obtient à la sortie une tension $u_S(t) = U_{Sm}\sin(2\pi Nt + \varphi_s)$.

Le circuit RC est représenté sur la figure ci-contre. Il est composé d'un résistor et d'un condensateur montés en série.

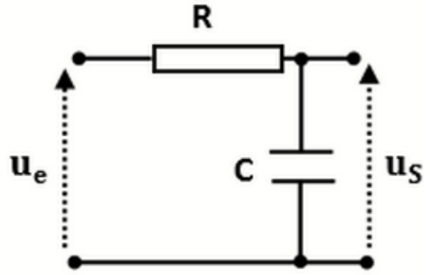
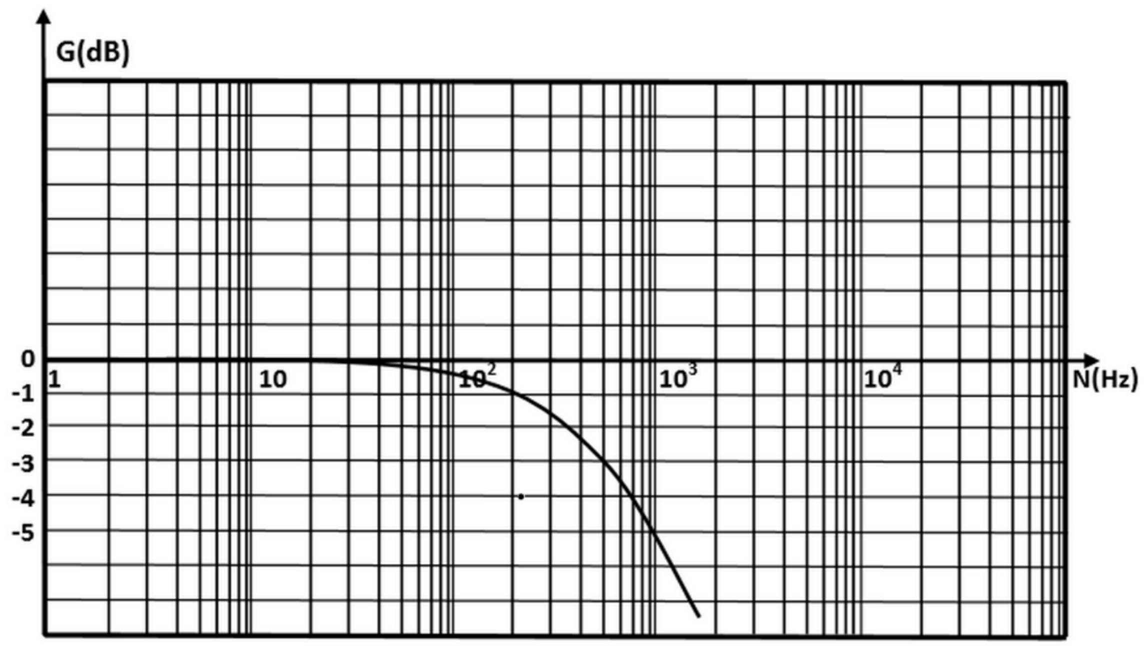


Fig. 1

1.
   a. En appliquant la loi des mailles, établir l'équation différentielle régissant la tension $u_S(t)$
   b. Faire la construction de Fresnel relative à cette équation différentielle
   c. Déterminer l'expression de la transmittance T en fonction de R, C et N
   d. En déduire que le gain de ce filtre s'écrit : $G = -10\log(1 + (2\pi NRC)^2)$

2. La courbe suivante représente l'évolution du gain G du filtre en fonction de la fréquence N.



ⓐ Déterminer graphiquement :

- la valeur maximale G_0 du gain G
- la fréquence de coupure N_C
- la largeur de la bande passante

ⓑ On applique à l'entrée de ce filtre une tension électrique $u_E(t) = 9\sin(800\pi t)$

i. Indiquer, en justifiant, si cette tension sera transmise ou non

ii. Si oui, calculer la valeur maximale U_{Sm} de la tension transmise

3 ⓐ Établir l'expression de la fréquence de coupure N_C de ce filtre en fonction de R et C

ⓑ Calculer la valeur de la résistance R

4 Sans modifier la valeur de R, faut-il augmenter ou diminuer la valeur de C pour que la bande passante du filtre soit plus large ? Justifier.

Golden Révision

Exercice 2 :

1) a) En appliquant la loi des mailles, établir l'équation différentielle régissant la tension $u_S(t)$

D'après la loi des mailles:

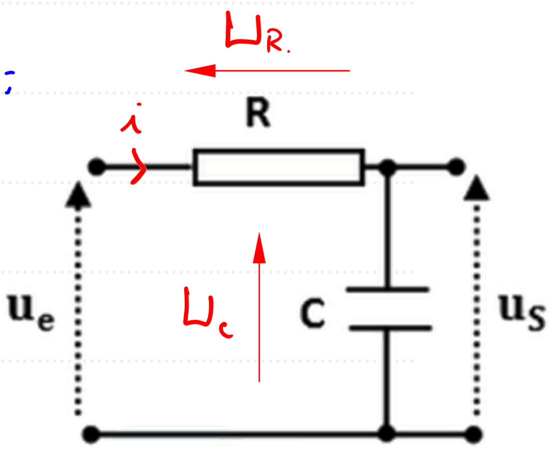


Fig. 1

$$U_e - U_c - U_R = 0.$$

$$U_e = U_R + U_c.$$

avec: $\begin{cases} U_e = U_s. \\ U_R = R.i = R.\frac{dq}{dt}. = RC\frac{dU_c}{dt} = RC\frac{dU_s}{dt}. \end{cases}$

$$\boxed{U_s + RC\frac{dU_s}{dt} = U_e.}$$

b) Faire la construction de Fresnel relative à cette équation différentielle

$$\underbrace{U_s}_{\vec{V_1}} + \underbrace{RC\frac{dU_s}{dt}}_{\vec{V_2}} = \underbrace{U_e}_{\vec{V_3}}.$$

$$U_s(t) = U_{sm}\sin(\omega t + \phi_s).$$

$\vec{V_1} \begin{vmatrix} U_{sm}. \\ \phi_s \end{vmatrix}$

$$RC\frac{dU_s}{dt} = RC\frac{d}{dt}\left(U_{sm}\sin(\omega t + \phi_s)\right).$$

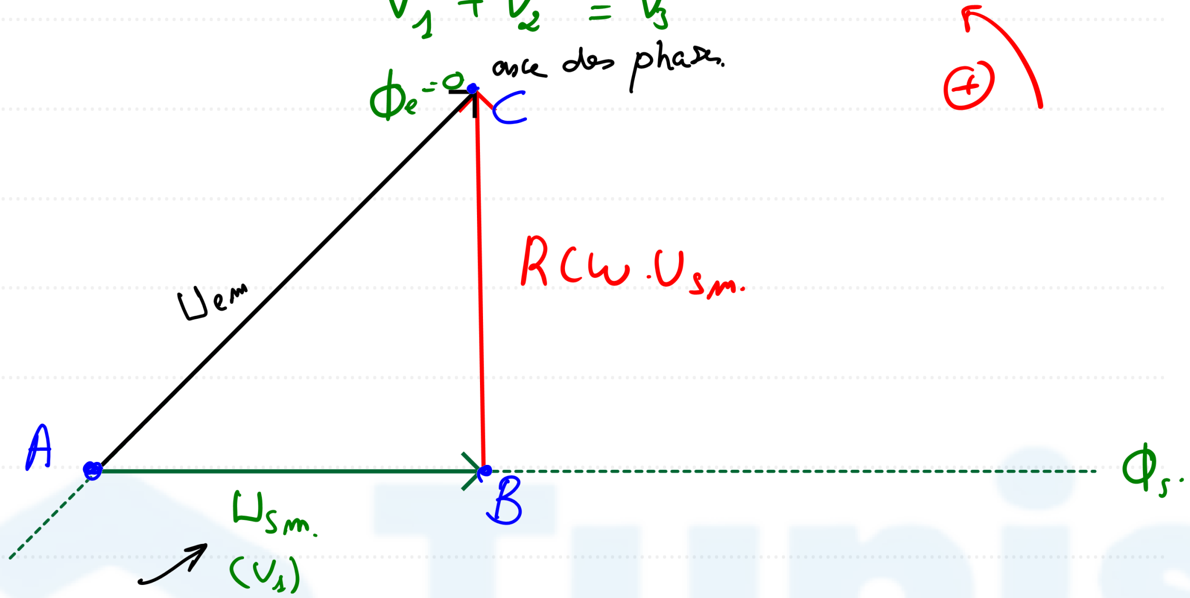
$$= RC\,U_{sm}\,\omega\cos(\omega t + \phi_s).$$

$$= RC\,U_{sm}\,\omega\sin\left(\omega t + \phi_s + \frac{\pi}{2}\right).$$

$\vec{V_2} = \begin{vmatrix} RC\omega U_{sm} \\ \phi_s + \frac{\pi}{2}. \end{vmatrix}$

$\vec{V_3} = \begin{vmatrix} U_{em} \\ \phi_e = 0 \end{vmatrix}$ $\quad U_e(t) = U_{em} \sin(\omega t)$.

$\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_3}$.



$$\boxed{\vec{V_1} \begin{vmatrix} U_{sm} \\ \phi_s \end{vmatrix} \quad \vec{V_2} = \begin{vmatrix} RC\omega U_{sm} \\ \phi_s + \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} \quad \vec{V_3} = \begin{vmatrix} U_{em} \\ \phi_e = 0 \end{vmatrix}}$$

(c) Déterminer l'expression de la transmittance T en fonction de R, C et N

(d) En déduire que le gain de ce filtre s'écrit : $G = -10\log(1 + (2\pi NRC)^2)$

* D'après pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$U_{em}^2 = U_{sm}^2 + (RC\omega U_{sm})^2.$$

$$U_{em}^2 = U_{sm}^2\left[1 + (RC\omega)^2\right].$$

$$\boxed{U_{em} = U_{sm}\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{\cancel{U_{sm}}}{\cancel{U_{sm}}\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+(RC2\pi N)^2}}}$$

4. $G = 20\log = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\right)$

$\log(1) = 0$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

$\log(\sqrt{c}) = \log(c^{\frac{1}{2}})$

$= \frac{1}{2}\log c$

$= 20\underbrace{\log(1)}_{0} - 20\log\left(\sqrt{1+(RC\omega)^2}\right)$

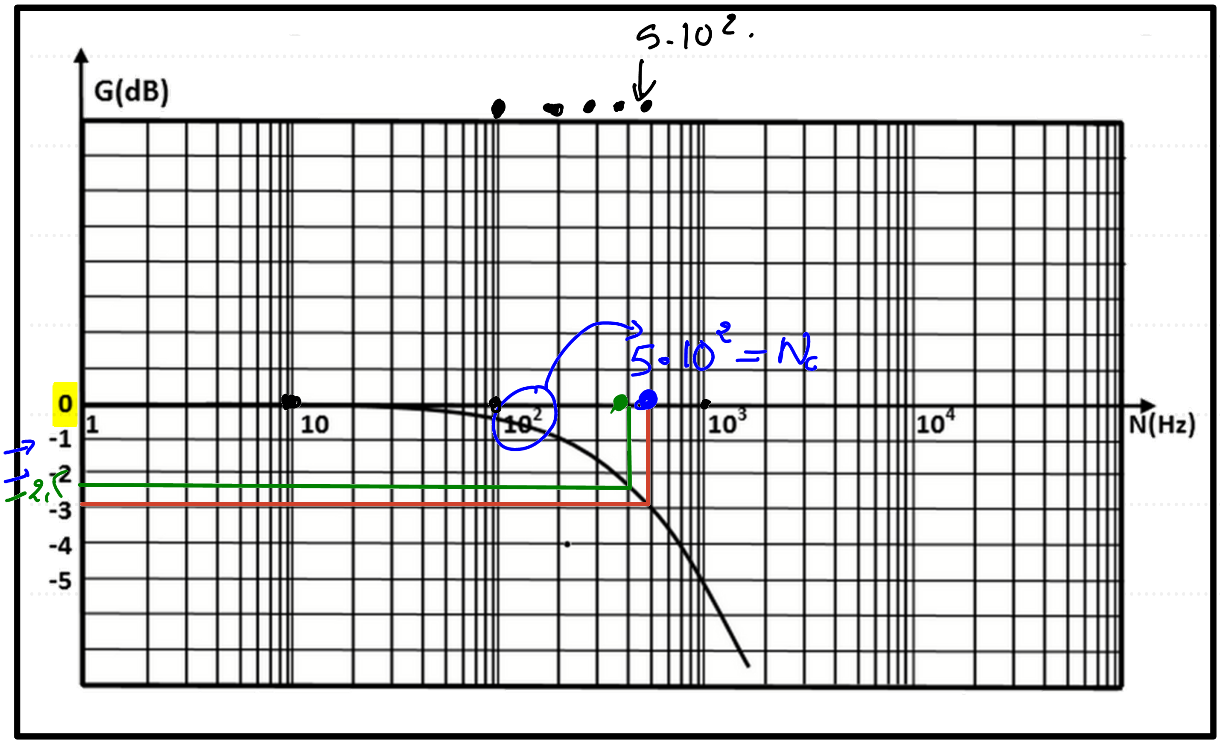
$= 0 - 20\log\left[(1+(RC\omega)^2)^{\frac{1}{2}}\right]$

$= -10\log\left(1+(RC\omega)^2\right)$

$$\boxed{G = -10\log\left[1+(RC2\pi N)^2\right]}$$

ⓐ Déterminer graphiquement :

- la valeur maximale G_0 du gain G
- la fréquence de coupure N_C
- la largeur de la bande passante



* $\boxed{G_0 = 0 \text{ dB.}}$

* pour $N = N_c \Rightarrow G = G_0 - 3\text{ dB}$

$= 0 - 3$

$\boxed{G = -3 \text{ dB.}}$

$\Rightarrow N_c = 500\text{Hz}$ (par projection sur la courbe, et projection sur l'axe des N).

pour un filtre passe bas : $\Delta N = [0, N_c]$. $\boxed{\Delta N = [0, 500\text{Hz}]}$.

b On applique à l'entrée de ce filtre une tension électrique $u_E(t) = 9\sin(800\pi t)$

i. Indiquer, en justifiant, si cette tension sera transmise ou non

ii. Si oui, calculer la valeur maximale U_{Sm} de la tension transmise

$\omega_1 = 2\pi N_1$.

$N_1 = \frac{\omega}{2\pi}$.

b i. $\omega_1 = 800\pi \Rightarrow N_1 = \frac{\omega}{2\pi}$.

$N_1 = \frac{800\pi}{2\pi} = 400\text{ Hz}$.

$\Rightarrow N_1 = 400\text{ Hz} \in [0, 500\text{Hz}]$. $\Rightarrow$ alors cette tension est transmise.

b ii. $T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}} \Rightarrow G = 20\log\left(\frac{U_{Sm}}{U_{Em}}\right)$

$\log(a)$

$\log\left(\frac{U_{Sm}}{U_{Em}}\right) = \frac{G}{20}$

$\Rightarrow a$?

$\boxed{a = 10^{\log(a)}}$

$\frac{U_{Sm}}{U_{Em}} = 10^{G/20}$

$N = 400\text{Hz} \longrightarrow G = -2{,}5\text{dB}$ $U_{Sm} = U_{Em} \cdot 10^{G/20}$

$$\boxed{U_{S_m} = U_{e_m} \cdot 10^{-2,5/20} = 9 \cdot 10^{-2,5/20} = 6,74\,V.}$$

③ ⓐ Établir l'expression de la fréquence de coupure N_C de ce filtre en fonction de R et C

pour $N = N_c$. $\Rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\,2\pi N_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$RC\,2\pi N_c = 1. \Rightarrow \boxed{N_c = \frac{1}{2\pi RC}}$$

ⓑ Calculer la valeur de la résistance R

$$N_c = \frac{1}{2\pi RC} \Leftrightarrow R = \frac{1}{2\pi N_c C}$$

$$= \frac{1}{2\pi \times 500 \times (0,47 \times 10^{-6})} = 677,25\,\Omega$$

mF → F (10^{-3})

μF → F (10^{-6})

nF → F (10^{-9})

pF → F (10^{-12})

④ Sans modifier la valeur de R, faut-il augmenter ou diminuer la valeur de C pour que la bande passante du filtre soit plus large ? Justifier.

[0, 500 Hz].

⇒ C inversement proportionnels

$$N_c = \frac{1}{2\pi R\,C} \;;\; N_c \propto \frac{1}{C}$$

$$\frac{1}{C} \propto N_c.$$