Magazine - Intégrales

NB: Magazine de difficultés Croissantes : Révision Profonde .

Exercice 1 ★★

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(2x^2+1)^2}dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

d) $\displaystyle\int_{-2}^2 x|x-1|dx$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx$

Exercice 2 ★★

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{3+x^2}}dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1°) a) Calculer I_1

b) Calculer $3I_1 + I_3$ et déduire I_3

2°) Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente

3°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3(n+1)}$

b) Calculer $\lim I_n$

Exercice 3 ⭐⭐

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1°) a) Justifier l'existence de (I_n)

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n > 0$

c) Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente

2°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n+1}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. Déduire $\lim I_n$

3°) Calculer I_2 et déduire I_4

Exercice 4 ⭐⭐

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \cos x$.

1 a Calculer $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $f'(x)$.

b Justifier que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$.

2 Soit g la fonction réciproque de f.

a Justifier que g est dérivable sur $[0, 1[$.

b Montrer que $\forall x \in [0, 1[$: $g'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3 a Calculer $g(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

b Montrer que $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

Exercice 5 ⭐⭐⭐

A) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

1 a Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

b Tracer la courbe C_f de f.

c Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

2 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]1, 2]$.

b Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

c Tracer C' la courbe de f^{-1}.

3 Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \tan x$

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

c Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$, calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

4 Calculer l'aire A du domaine plan limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 6 ★★★

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 a Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b Dresser le tableau de variation de f.

c Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$.

d Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

e Construire C_f et C' la courbe représentative de f^{-1}.

2 Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $y = 1$. Montrer que $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

3 On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$

a Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que (U_n) est convergente.

b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.

4 On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - t^2 + t^4 - t^6 + ... + (-1)^n t^{2n} - \dfrac{1}{1+t^2} = (-1)^n \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n - I = (-1)^n U_n$ où $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

c Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|V_n - I| \leq \dfrac{1}{2n+1}$ puis déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$

5 Soit F la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $F(x)=\int_0^{\tan x}\frac{t^2}{1+t^2}dt$

a Montrer F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer $F'(x)$.

b En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

c Déterminer alors la valeur exacte de A.

Exercice 7 ★★★

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

1 a Justifier l'existence de U_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $U_n\geq 0$.

c Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d Vérifier que : $U_1=1$ et que $U_2=\frac{\pi}{4}$.

2 a À l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{n+1}U_{n+2}$

b En déduire $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}U_n$.

c Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1}U_n\leq U_{n+1}\leq U_n$ En déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

3 a Montrer par récurrence que : pour tout $n\geq 2$ on a : $nU_nU_{n-1}=\frac{\pi}{2}$

b En déduire la limite de la suite U.

Exercice 8 ★★★★

A) Pour $x\in[0,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ on considère la suite (U_n) définie par :
$U_0=\int_0^1\cos(\frac{\pi}{2}x)dx$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $U_n=\int_0^1 x^n\cos(\frac{\pi}{2}x)dx$

1 a Calculer U_0 et U_1

b En utilisant deux intégrations par parties montrer que $\forall x\in[0,1]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+2}=\frac{2}{\pi}-\frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2}U_n$

c Calculer U_2 et U_3

2 a Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

c Déterminer la limite de la suite (U_n).

B) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^4 \cos(\frac{\pi}{2}x)dx$; $x \in [0,1]$

1 a Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq V_n \leq \dfrac{1}{5n^5}$

c Déterminer alors la limite de la suite (V_n).

2 Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \displaystyle\int_{(-1)^{n+1}/n}^{(-1)^n/n} x^4 \cos(\frac{\pi}{2}x)dx$

a Exprimer W_{2n+1} en fonction de V_{2n+1}

b Exprimer W_{2n} en fonction de V_{2n}

c Déterminer alors la limite de la suite (W_n).