Durée : 5 heures

math bac sc et tech

2- Analyse (Ln,Exp,Exp)

Exercice 1:/ ()

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+\ln x$ et on désigne par (C) sa courbe
représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)>0$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que
   $0,5<\alpha<0,6$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

   b) Montrer que le point G(1,1) est un point d'inflexion de la courbe (C).

   c) Montrer que la droite T : $y=2x-1$ est la tangente à (C) au point G.

4) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-(2x-1)$.

   a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}$ et en déduire que la fonction g est
   croissante.

   b) Calculer g(1) et déterminer le signe de g sur $]0,+\infty[$.

   c) Déduire la position relative de T et (C).

5) Tracer T et (C).

Exercice 2:/ ()

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

(C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① ⓐ Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ⓑ Montrer que la droite $(\Delta) : y = \frac{1}{3}x$ est une asymptote de (C) au voisinage de $+\infty$.

ⓒ Étudier la position relative de (C) et (Δ).

② ⓐ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

ⓑ En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ⓒ Montrer que la droite $(\Delta') : y = -\frac{2}{3}x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

③ ⓐ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.

ⓑ Étudier les variations de f.

④ ⓐ Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

ⓑ Vérifier que le point $A(\ln 2, \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2)$ est un point de (C).

ⓒ Dans l'annexe figure 1 on a placé A et on a tracé (Δ) et (Δ'). Tracer (C) et (T).

⑤ Soient M et N deux points de (C) d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que (MN) et (T) sont parallèles.

⑥ Soit n un entier naturel non nul. On appelle D_n l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe (Δ) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

ⓐ Justifier que pour tout entier n non nul $D_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x})dx$.

ⓑ Soit a un réel strictement positif.

- Démontrer que pour tout $t \in]1, 1 + a[$ on a $\frac{1}{1 + a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.
- En déduire que pour tout réel a strictement positif $\frac{a}{1 + a} \leq \ln(1 + a) \leq a$.

ⓒ Montrer que tout entier n non nul $D_n \leq 1$.

ⓓ Montrer que la suite (D_n) est croissante.

ⓔ Déduire que la suite (D_n) converge vers une limite l et que $\ln 2 \leq l \leq 1$.

Exercice 3:/ (3,5 points)

A) ⓐ Donner le sens de variation de la fonction u définie sur IR par u(x) = 1 + xe^{x}.

ⓑ En déduire que pour tout réel x, 1 + xe^{x} > 0.

B) On considère la fonction f définie sur IR par f(x) = $-$x + $\ln(1+xe^{x})$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

ⓐ a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $(-\infty)$.

c) Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite Δ.

ⓑ a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(x + e^{-x})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter les résultats.

ⓒ a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{1 + xe^{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

ⓓ On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction h définie sur IR par h(x) = x + 2 - e^{x}.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h			1		
		↗		↘	
	$-\infty$				$-\infty$

a) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet exactement deux solutions $\alpha < \beta$.

b) On note f'' la dérivée seconde de f.

Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{h(x)e^{x}}{(1 + xe^{x})^{2}}$.

c) En déduire que les points A$(\alpha, f(\alpha))$ et B$(\beta, f(\beta))$ sont deux points d'inflexion de la courbe (C) représentative de f.

ⓔ Pour tout réel $\lambda > 1$, on désigne par $\mathcal{A}_{\lambda}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = λ.

a) Montrer que pour tout x ∈ $[1, +\infty[$, $\ln x \le f(x) \le \ln x + \ln(1 + e^{-1})$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}_{\lambda}$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{\mathcal{A}_{\lambda}}{\lambda \ln \lambda}$.

3- Probabilité

Exercice 4:/ ()

On considère un dé cubique équilibré à six faces dont deux portent le chiffre 1 et les autres portent le chiffre 2.
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

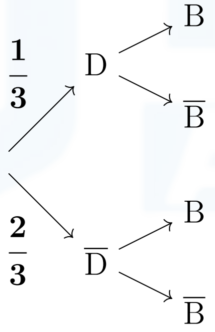
- L'urne U_1 contient une boule blanche et trois boules rouges.
- L'urne U_2 contient deux boules blanches et deux boules rouges.

Une épreuve consiste à lancer une fois le dé : Si la face supérieure porte le chiffre 1, on tire au hasard une boule de l'urne U_1 ; si la face supérieure porte le chiffre 2, on tire au hasard une boule de l'urne U_2.
On considère les événements suivants :

- D : La face supérieure du dé porte le chiffre 1 .
- B : Tirer une boule blanche .

1) a) Montrer que $p(D) = \frac{1}{3}$

   b) Recopier et compléter l'arbre pondéré



   ci-contre.

2) a) Montrer que $p(B) = \frac{5}{12}$

   b) Sachant que l'on a tiré une boule blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_2 ?

3) On répète l'épreuve cinq fois de suite en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne.

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir une seule fois une boule blanche.
   c) Soit q la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge. Calculer q.

)Exercice 5:/ ()

Une étude statistique montre que dans une ville, 10% des personnes pubères sont atteintes par une maladie M.

On choisit au hasard un couple marié dans cette ville et on désigne par :

- A (événement) : le mari est atteint par la maladie M .
- B (événement) : l'épouse est atteinte par la maladie M .

On admet que les événements A et B sont indépendants.

1) Déterminer p(A) et p(B).

2) On considère les événements suivants :

   - M_0 : Aucun des deux conjoints n'est atteint par la maladie M .
   - M_1 : Un seul conjoint est atteint par la maladie M .
   - M_2 : Les deux conjoints sont atteints par la maladie M .

   Justifier que $p(M_0) = 0{,}81$; $p(M_1) = 0{,}18$ et $p(M_2) = 0{,}01$.

3) Ce couple est de nouveau examiné.
   On note E l'événement : Le nouveau-né est atteint par la maladie M .
   L'étude montre que la probabilité qu'un nouveau-né soit atteint par la maladie M est égale à :

   - 0,02 si aucun de ses parents n'est atteint par la maladie M;
   - 0,1 si un seul de ses parents est atteint par la maladie M;
   - 0,5 si les deux parents sont atteints par la maladie M.

   a) Déterminer $p(E \cap M_0)$, $p(E \cap M_1)$ et $p(E \cap M_2)$.
   b) En déduire que $p(E) = 0{,}057$.
   c) Calculer la probabilité qu'aucun des parents n'est atteint par la maladie M sachant que le nouveau-né est atteint. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4}.

4) On choisit au hasard n nouveaux nés dans cette ville, où n est un entier supérieur ou égal à 2.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de nouveaux nés atteints par la maladie M parmi les n nouveaux nés choisis. On suppose que X suit une loi binomiale.

   a) Déterminer les paramètres de X.
   b) Déterminer la probabilité p_n qu'aucun des nouveaux nés ne soit atteint par la maladie M.
   c) Déterminer la plus grande valeur de n telle que p_n soit supérieure ou égale à 0,75.